I Wielkopolska Liga Matematyczna

A1. Ciąg (a) liczb całkowitych dodatnich spełnia dla każdego n całkowitego dodatniego warunki

$$a_{2n} = 3a_n - 1, \qquad a_{2n+1} = 3a_n + 1.$$

Wykazać, że ciąg ten jest ściśle rosnący.

A2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ spełniony jest warunek $|AB| = |BC| + |DA|$. Dwusieczne kątów ABC i DAB przecinają się w punkcie P. Udowodnić, że $|CP| = |DP|$.

A3. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Trójkąt równoboczny o boku n rozcięto na t trójkątów równobocznych o boku 1 oraz pewną liczbę rombów o boku 1 i kącie ostrym 60°. Udowodnić, że $t \geqslant n$.

A4. Liczby a, b, c są całkowite dodatnie, przy czym $a^2 + b^2 = c^2$. Dowieść, że $c^2 + \frac{2}{3}ab$ jest całkowita i złożona.

B1. Z kostek domina o wymiarach 2×1 ułożono kwadrat. Udowodnić, że z pewnych dwóch kostkek ułożony jest kwadrat o wymiarach 2×2.

B2. Liczby m i n są względnie pierwsze. Wykazać, że równanie

$$a^n + b^n = c^m$$

posiada nieskończenie wiele rozwiązań w trójkach (a, b, c) liczb całkowitych dodatnich.

B3. Dany jest trójmian kwadratowy $T(x) = x^2 + 4x + 2$. Dla liczby całkowitej dodatniej n definiujemy

$$P_n(x) = T(T(\ldots T(x)\ldots))$$

(we wzorze T występuje n razy). W zależności od n wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x, spełniające równanie $P_n(x) = 0$.

B4. Na boku AC trójkąta ABC wybrano punkt Q. Punkt P jest środkiem odcinka BC. Odcinki AP i BQ przecinają się w punkcie T. Punkt R jest środkiem odcinka AT, natomiast punkt S leży na odcinku BT i spełnia równość $|BS| = |QT|$. Dowieść, że prosta PS jest równoległa do prostej QR.

C1. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba $p + 8$ jest podzielna przez $\left\lfloor \sqrt{p} \right\rfloor$.
(Symbol $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.)

C2. W zależności od $n \geqslant 2$ wyznaczyć największą możliwą liczbę szachowych wież, którą można w taki sposób ustawić na szachownicy o wymiarach $n \times n$, by spełniony był następujący warunek: jeśli jedna z wież jest szachowana przez dwie inne, to wszystkie trzy stoją na jednej lini.

C3. Dany jest trójkąt ABC. Okrąg o środku D jest styczny do odcinka BC oraz do prostych AB i AC w punktach leżących poza trójkątem ABC. Wykazać, że prosta AD przechodzi przez środek okręgu opisanego na trójkącie BCD.

C4. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c spełniają następujące równości:

$$a + b + c = 17, \qquad a \cdot b \cdot c = 64.$$

Dowieść, że $\max\{a, b, c\} \geqslant 8$.

II Wielkopolska Liga Matematyczna

A1. Najkrótsza przekątna dziewięciokąta foremnego o boku a ma długość d. Udowodnić, że jego najdłuższa przekątna ma długość $a + d$.

A2. Liczby całkowite dodatnie a, b, c, d, e spełniają równości

$$a + b = c + d + e, \qquad a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2.$$

Wykazać, że przynajmniej jedna z liczb a, b jest złożona.

A3. Mamy 60 żetonów, każdy o wartości $2, 3, 4, 5$ lub 6 złotych. Wykazać, że można wypłacić tymi żetonami kwotę 60 złotych, bez konieczności rozmiany.

A4. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a + b + c = 1$. Dowieść, że zachodzi następująca nierówność:

$$\sqrt{a - bc} + \sqrt{b - ca} + \sqrt{c - ab} \leqslant \sqrt{2},$$

o ile liczby występujące pod pierwiastkami są nieujemne.

B1. Udowodnić, że dowolny wielościan wypukły ma parzystą liczbę ścian będących wielokątami o nieparzystej liczbie boków.

B2. Dany jest okrąg o_1 i jego cięciwa AB. Okrąg o_2 jest styczny wewnętrznie do o_1 w punkcie C oraz do odcinka AB w punkcie D. Wykazać, że CD jest dwusieczną kąta ACB.

B3. Wielomian $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ nazywamy palindromicznym, jeżeli $a_n \neq 0$ oraz $a_k = a_{n-k}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$. Udowodnić, że iloczyn dwóch wielomianów palindromicznych jest także wielomianem palindromicznym.

B4. Rozstrzygnąć, czy istnieją liczby całkowite dodatnie m, n, spełniające równanie $m^{m^2} = (2n^2)^{n^2}$.

C1. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x zależność

$$f(x) = f(f(x)) + x.$$

Udowodnić, że funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

C2. Rozstrzygnąć, czy istnieje ciąg liczb całkowitych dodatnich, spełniający następujące własności:
1. Każda liczba całkowita dodatnia występuje w tym ciągu dokładnie raz.
2. Każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest dzielnikiem lub wielokrotnością poprzedniego wyrazu.

C3. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$. Wykazać, że jeśli $|\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle PDA|$, to również $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle PCB|$.

C4. Płaszczyznę podzielono na trójkąty równoboczne w ten sposób, że w każdym wierzchołku (będziemy dalej nazywać je węzłami) spotyka się sześć trójkątów. W każdym węźle znajduje się lampka, natomiast na każdym trójkącie jest włącznik, który zmienia stan lampek znajdujących się w węzłach będących wierzchołkami tego trójkąta (zgaszone zapalają się, a zapalone gasną). Rozstrzygnąć, czy zaczynając od sytuacji w której wszystkie lampki są zgaszone, możemy doprowadzić to tego, by paliła się dokładnie jedna lampka.

III Wielkopolska Liga Matematyczna

A1. Różne liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunek

$$x^2 - y = y^2 - z = z^2 - x.$$

Udowodnić, że $(x+y)(y+z)(z+x) = 1$.

A2. Przez $s(n)$ oznaczmy sumę cyfr zapisu dziesiętnego liczby całkowitej $n \geqslant 1$. Wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość wyrażenia $\frac{s(2n)}{s(n)}$.

A3. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$ oraz ciąg $n-1$ znaków mniejszości i większości. Wykazać, że liczby $1, 2, \ldots, n$ można tak wstawić między znaki, aby zachodzące nierówności były spełnione (na przykład dla $n = 5$ i ciągu znaków $(<, >, >, <)$ mamy $4 < 5 > 2 > 1 < 3$).

A4. Punkt T jest środkiem boku CD czworokąta wypukłego $ABCD$. Dowieść, że jeśli trójkąt ABT jest równoboczny, to $|BC| + |DA| \geqslant |AB|\sqrt{3}$.

B1. Odcinek AB jest dłuższą podstawą trapezu $ABCD$, w którym zachodzi równość $\sphericalangle ACB + \sphericalangle CAD = 180°$. Udowodnić, że $AB \cdot AD = BC \cdot CD$.

B2. Funkcje $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniają dla każdej liczby naturalnej n następujące warunki:

$$g(n) = f(f(n)) = f(n+1), \qquad f(n) \neq n+1.$$

Wykazać, że funkcja g jest okresowa.

B3. Każdy z 2^n podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ wypisano na jednej z n kart ponumerowanych od 1 do n. Dowieść, że dla pewnego k na k-tej karcie znajduje się zbiór zawierający k oraz zbiór, który nie zawiera k.

B4. Rozstrzygnąć, czy istnieje ściśle rosnący ciąg liczb całkowitych dodatnich $(a_1, a_2, \ldots)$, który spełnia następujące warunki

$$a_n \mid a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}, \qquad a_n < a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$$

dla wszystkich $n \geqslant 4$.

C1. Udowodnić, że równanie $a^a + b^b = c^c$ nie posiada rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich a, b, c.

C2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą następujące związki:

$$|\sphericalangle ABD| = 2|\sphericalangle ACD|, \quad |\sphericalangle ADB| = 2|\sphericalangle ACB|.$$

Wykazać, że AC jest dwusieczną kąta BAD.

C3. W turnieju szachowym każdy gracz rozegrał z każdym partię, zakończoną wygraną, przegraną bądź remisem. Okazało się, że dla dowolnych graczy A, B, C jeśli A wygrał z B i B wygrał z C, to C wygrał z A. Dowieść, że jeśli gracz A_i wygrał z A_{i+1} dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ oraz gracz A_n wygrał z A_1, to n jest liczbą podzielną przez 3.

C4. Wielomian P o współczynnikach rzeczywistych ma stopień n. Dowieść, że funkcja

$$f(x) = \binom{n}{0}P(x) - \binom{n}{1}P(x+1) + \binom{n}{2}P(x+2) - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}P(x+n)$$

jest stała.

IV Wielkopolska Liga Matematyczna

A1. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba naturalna mniejsza od iloczynu swoich cyfr w zapisie dziesiętnym.

A2. Liczby a, b, c, d są całkowite dodatnie i różne. Udowodnić, że przynajmniej dwie spośród liczb

$$|ab - cd|, \quad |ac - bd|, \quad |ad - bc|$$

są większe od najmniejszej z liczb a, b, c, d.

A3. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią oraz niech $A \subset \{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$ będzie zbiorem k-elementowym. Każdy podzbiór zbioru A ma sumę elementów różną od k. W zależności od n wyznaczyć największą liczbę k, dla której jest to możliwe.

A4. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Wykazać, że istnieje punkt P, leżący na tej samej płaszczyźnie co trójkąt ABC, dla którego zachodzą równości $|AB|^2 - |CP|^2 = |BC|^2 - |AP|^2 = |CA|^2 - |BP|^2$.

B1. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ spełnione są równości

$$|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle BEC| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle BDC|.$$

Udowodnić, że $|AB| = |BC|$.

B2. Liczby dodatnie a, b, c spełniają równość $a + b + c = 1$. Wykazać, że

$$\frac{3a-1}{1-a^2} + \frac{3b-1}{1-b^2} + \frac{3c-1}{1-c^2} \geqslant 0.$$

B3. Na płaszczyźnie leży $n \geqslant 3$ punktów. Wszystkie odcinki o końcach w tych punktach mają różne długości. Wypiszmy te długości w porządku malejącym: $d_1 > d_2 > d_3 > \ldots$. Wykazać, że $d_1 \leqslant d_n + d_{n-1}$.

B4. Niech $a \geqslant 2$ i $n \geqslant 1$ będą liczbami całkowitymi. Dowieść, że jeśli liczba $a^{2n} + a^n + 1$ jest pierwsza, to n jest potęgą trójki o wykładniku całkowitym nieujemnym.

C1. Dane są liczby całkowite $a > b > 0$ oraz taka liczba pierwsza $p > 3$, że p^2 jest dzielnikiem $a^3 - b^3$. Udowodnić, że $p < a\sqrt{3}$.

C2. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta prostopadła do CI, przechodząca przez punkt I, przecina odcinki AC i BC w punktach odpowiednio P i Q. Wykazać, że $|AP| + |BQ| < |AB|$.

C3. W zależności od liczby naturalnej $n \geqslant 2$ wyznaczyć liczbę ciągów $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liczb rzeczywistych, spełniających układ równań

$$\begin{cases} x_1^2 & = 2x_1x_2 + 1, \\ x_2^2 & = 2x_2x_3 + 1, \\ \ldots & \\ x_{n-1}^2 & = 2x_{n-1}x_n + 1, \\ x_n^2 & = 2x_nx_1 + 1. \end{cases}$$

C4. Każdej parze uporządkowanej (x, y) elementów zbioru n-elementowego A przyporządkowujemy element $F(x, y) \in A$, przy czym dla wszystkich $x, y \in A$ zachodzi równość

$$F(F(x, y), F(y, x)) = F(F(y, x), F(x, y)).$$

Dowieść, że istnieje przynajmniej $n^{7/3}$ uporządkowanych czwórek (a, b, c, d) elementów zbioru A, dla których jednocześnie zachodzą równości $F(a, b) = F(c, d)$ i $F(b, a) = F(d, c)$.

V Wielkopolska Liga Matematyczna

A1. Rozwiązać równanie $a+b=a^2-ab+b^2$ w liczbach całkowitych a i b.

A2. Dany jest trójkąt ABC. Punkty P, Q, R leżą na odcinkach odpowiednio BC, CA, AB, przy czym AP jest dwusieczną kąta BAC oraz $|\sphericalangle BPR| = |\sphericalangle CPQ| = |\sphericalangle BAC|$. Wykazać, że trójkąty BPR i CPQ są przystające.

A3. W zależności od $n \geqslant 2$ wyznaczyć liczbę rozwiązań poniższego układu w liczbach rzeczywistych:

$$\begin{cases} x_1x_2 &= x_1+x_2, \\ &\vdots \\ x_{n-1}x_n &= x_{n-1}+x_n, \\ x_nx_1 &= x_n+x_1. \end{cases}$$

A4. Dwusieczne kątów A i B trójkąta ABC przecinają odcinki BC i CA w punktach odpowiednio P i Q. Wykazać, że jeżeli symetralne odcinków AP i BQ przecinają się na odcinku AB, to $|AB|^2 = |BC|\cdot|CA|$.

A5. Na tablicy napisano pewnien skończony ciąg o wyrazach w zbiorze $\{1,2,3\}$. Liczba jedynek na miejscach parzystych jest taka sama, jak na nieparzystych; analogicznie dla dwójek i trójek. Możemy:

1. Zmazywać dwa kolejne wyrazy, jeśli są one równe;
2. Jeśli trzy kolejne wyrazy x,y,z są różne, to można je zastąpić przez z,y,x.

Dowieść, że stosując te operacje, możemy całkowicie wymazać wyjściowy ciąg.

B1. Czworokąt $ABCD$ jest wypukły. Punkty P oraz Q są środkami odcinków odpowiednio CD i AB. Wykazać, że jeśli $AP \parallel CQ$ i $BP \parallel DQ$, to czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

B2. Wykazać, że liczba $\underbrace{111\ldots1}_{n \text{ jedynek}}\underbrace{222\ldots2}_{n \text{ dwójek}}$ jest iloczynem pewnych dwóch kolejnych liczb naturalnych.

B3. Ustalmy liczbę naturalną n. Niech A oznacza zbiór punktów płaszczyzny (x,y) różnych od $O=(0,0)$, o współrzędnych x i y całkowitych, spełniających warunki $|x| \leqslant n$ i $|y| \leqslant n$. W zależności od n znaleźć najmniejszą liczbę m o następującej własności: Każdy m-elementowy podzbiór zbioru A zawiera takie punkty P i Q, że kąt POQ jest prosty.

B4. Dowieść, że jeśli a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta, to prawdziwa jest nierówność

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geqslant a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2.$$

B5. Wyznaczyć wszystkie niestałe wielomiany P o współczynnikach całkowitych, spełniające warunek: Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n co najwyżej jedna z liczb $P(1), P(2), \ldots, P(2n-1)$ dzieli się przez n.

C1. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, spełniające dla każdego $x\in\mathbb{R}$ warunek $xf(x)+f(-x)=1$.

C2. W pewnym kraju każde dwa spośród $n \geqslant 3$ miast są połączone drogą jednokierunkową, ale z każdego miasta można dojechać do dowolnego innego (niekoniecznie bezpośrednio). Nazwijmy trójkątem takie trzy miasta A,B,C, że istnieją bezpośrednie drogi z A do B, z B do C i z C do A. Wykazać, że każde miasto należy do pewnego trójkąta.

C3. Liczby naturalne a i b są dzielnikami n. Wykazać, że jeśli liczba $\frac{n}{a}+\frac{n}{b}$ jest podzielna przez a i b, to liczba n jest podzielna przez $\frac{(\mathtt{NWW}(a,b))^2}{\mathtt{NWD}(a,b)}$.

C4. Wysokość opuszczona na bok BC trójkąta ostrokątnego ABC ma długość równą średniej arytmetycznej długości jego wszystkich boków. Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie i mają jednakowe promienie r. Ponadto okrąg o_1 jest styczny do odcinków AB i BC, natomiast okrąg o_2 jest styczny do odcinków BC i CA. Dowieść, że $|BC| = 5r$.

C5. Ciąg (a) zdefiniowany jest następująco: $a_1=\frac{1}{2}$, $a_{k+1}=\frac{1}{1+a_k-a_k^2}$ dla $k\geqslant 1$. Dowieść, że $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n < \frac{1}{\sqrt{2n}}$ dla wszystkich $n\geqslant 1$.

VI Wielkopolska Liga Matematyczna

A1. Każdemu wierzchołkowi dwudziestościanu foremnego przypisano jedną liczbę ze zbioru $\{0, 1, \ldots, 6\}$. Na każdej ścianie zapisano sumę liczb przypisanych jej wierzchołkom. Udowodnić, że na pewnych dwóch ścianach zapisano taką samą liczbę.

A2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Dwusieczne kątów ABC i BCD przecinają się w punkcie P leżącym na odcinku AD. Wykazać, że P jest środkiem odcinka AD.

A3. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_k$ będą nieujemne oraz $s_k = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Wykazać, że

$$\sqrt[n]{(s_1+1)(s_2+1)\ldots(s_n+1)} \leqslant (x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_n+1).$$

A4. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą, która nie jest dzielnikiem żadnej z liczb całkowitych a, b. Liczby a^2+b^2 i a^3+b^3 dają resztę 1 z dzielenia przez p. Dowieść, że $a+b+2$ dzieli się przez p.

A5. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n, dla których istnieje taki wielomian n-tego stopnia $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że wielomian $Q(x) = P(x^2+1)$ jest podzielny przez $P(x)$.

B1. W czworokącie $ABCD$ kąty przy wierzchołkach B i C są proste. Punkt P leży na odcinku BC. Rozstrzygnąć, czy jest możliwe, by trójkąty ABP, CDP i DAP miały jednakowe pola.

B2. Niech k i n będą liczbami całkowitymi dodatnimi spełniającymi warunek $k \leqslant n \leqslant k^2$. Udowodnić, że wśród liczb $\lfloor n/i \rfloor$ dla $i = k, k+1, \ldots, 2k$ jest przynajmniej jedna liczba nieparzysta.

B3. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki ciąg $(a_1, a_2, \ldots)$ liczb wymiernych dodatnich, że każda liczba wymierna dodatnia występuje w nim dokładnie raz, a ponadto na_n jest liczbą naturalną dla wszystkich $n \geqslant 1$.

B4. Wyróżniono k spośród 2^n podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, przy czym $k < 2^n$. Dla każdych dwóch wyróżnionych podzbiorów A i B, podzbiory $A \cup B$ i $A \setminus B$ również są wyróżnione. W zależności od n wyznaczyć największą liczbę k, dla której powyższa sytuacja jest możliwa.

B5. Dany jest czworościan $ABCD$. Oznaczmy przez I środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkt K leży na krawędzi AD, przy czym $\frac{|AK|}{|KD|} = \frac{|AB|+|BC|+|CA|}{|BC|}$. Punkt L jest punktem przecięcia prostej AI z bokiem BC. Odcinki KL i DI przecinają się w punkcie P. Dowieść, że $|IP| = |DP|$.

C1. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_n$ będą różnymi liczbami pierwszymi i niech $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} = \frac{a}{p_1 p_2 \ldots p_n}$. Udowodnić, że ułamek znajdujący się po prawej stronie tej równości jest nieskracalny.

C2. Na płaszczyźnie, lecz nie na jednej prostej, leżą odcinki AB i CD o jednakowej długości. Wykazać, że istnieje taki punkt P, że trójkąty ABP i CDP są przystające.

C3. W zależności od $n \geqslant 2$ wyznaczyć największą liczbę rzeczywistą c o następującej własności: Jeśli ciągi liczb rzeczywistych dodatnich $(x_1, \ldots, x_n)$ i $(y_1, \ldots, y_n)$ mają takie same wyrazy (choć niekoniecznie w tej samej kolejności), to

$$\frac{x_1}{y_1+y_2} + \frac{x_2}{y_2+y_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}+y_n} + \frac{x_n}{y_n+y_1} \geqslant c.$$

C4. Na płaszczyźnie zaznaczono $n \geqslant 2$ punktów, żadne trzy nie leżą na jednej prostej oraz odległości pomiędzy każdymi dwoma z nich są różne. Nazwijmy odcinek AB dziwnym, jeśli punkt B jest położony najbliżej punktu A ze wszystkich pozostałych zaznaczonych punktów, a punkt A jest położony najdalej od punktu B ze wszystkich zaznaczonych punktów. W zależności od n wyznaczyć największą możliwą liczbę dziwnych odcinków.

C5. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, mające dzielnik $d > 2$, spełniający warunek

$$\mathtt{NWD}(n+1, d-2) > \sqrt{n+1}.$$

VII Wielkopolska Liga Matematyczna

A1. Rozwiązać układ równań $|x-y| = z^7$, $|y-z| = x^7$, $|z-x| = y^7$ w liczbach rzeczywistych x, y, z.

A2. Liczby a i b są całkowite dodatnie, ponadto $a^3 + b^3 = p^n$ dla pewnej liczby pierwszej p i liczby naturalnej n. Udowodnić, że $p = 2$ lub $p = 3$.

A3. Nazwijmy *grubym* prostokąt o bokach x i y, spełniających warunek $\frac{1}{2}x < y < 2x$. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których z kafelków o wymiarach

$$1 \times 1, \quad 1 \times 2, \quad \ldots, \quad 1 \times n$$

można ułożyć gruby prostokąt, przy czym każdy z tych kafelków powienien być użyty dokładnie jeden raz.

A4. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki ciąg $(a_1, a_2, \ldots)$ liczb nieujemnych, że dla wszystkich $n \geqslant 2$ zachodzą nierówności $a_{n+1} < a_n$ oraz $s_{n+1} > s_n$, gdzie s_n jest średnią arytmetyczną n początkowych wyrazów ciągu (a).

A5. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ zachodzą następujące równości:

$$|AB| = |BC| = |CD|, \qquad |AE| = |EB| = |BD|, \qquad |AC| = |CE| = |ED|.$$

Wyznaczyć miary kątów tego pięciokąta.

B1. Niech A_1, B_1, C_1 będą środkami boków trójkąta ABC, leżących naprzeciw wierzchołków odpowiednio A, B, C. Dowieść, że z odcinków AA_1, BB_1, CC_1 można zbudować trójkąt.

B2. Na kole (z brzegiem) o promieniu 1 znajduje się pchła. Wyznaczyć wszystkie liczby dodatnie d, dla których pchła potrafi dostać się z każdego punktu koła na każdy, wykonując pewną liczbę skoków o długości równej d i nie opuszczając przy tym koła.

B3. Znaleźć wszystkie pary liczb naturalnych (m, n), dla których $m^2 n \mid m^4 + m + n$.

B4. W równoległoboku $ABCD$ kąt przy wierzchołku A ma miarę $\alpha < 60°$. Punkt $P \neq D$ spełnia warunek $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle PCB| = \alpha$. Wykazać, że $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CPD|$.

B5. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą liczbami rzeczywistymi, przy czym $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Położmy $x_0 = x_n$ i $x_{n+1} = x_1$ oraz $y_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \cdot \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Dowieść, że

$$8\overline{y} + 4 \geqslant 11\overline{x},$$

gdzie $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ i $\overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}$.

C1. Niech $a, k, l \geqslant 2$ będą liczbami naturalnymi. Udowodnić, że liczby

$$M = 1 + a^k + a^{2k} + \ldots + a^{(l-1)k} \quad \text{i} \quad N = 1 + a^l + a^{2l} + \ldots + a^{(k-1)l}$$

posiadają wspólny dzielnik większy od 1.

C2. Wykazać, że dla $n \geqslant 2$ wszystkie współczynniki wielomianu

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{1}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) \ldots \left(x + \frac{1}{n}\right)$$

są mniejsze od n.

C3. W trójkącie ostrokątnym ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę większą niż 45°. Punkty K i L leżą odpowiednio na odcinkach AB i AC, przy czym $|AK| = |AL|$. Udowodnić, że $|AB|^2 + |AC|^2 < (|BL| + |CK|)^2$.

C4. Dla ustalonej liczby rzeczywistej $c > 0$ i liczby naturalnej $a_1 \geqslant 1$ określamy następujący ciąg $(a_1, a_2, \ldots)$: dla $n > 1$ liczba a_n jest najmniejszą wielokrotnością n nie mniejszą niż ca_{n-1}.
Wyznaczyć wszystkie takie $c > 0$, że niezależnie od wartości a_1, dla pewnego m zachodzi równość $a_m = m$.

C5. Wszystkie ściany pewnego wielościanu wypukłego są trójkątami. Ponadto w każdym jego wierzchołku, za wyjątkiem dokładnie dwóch, spotyka się parzysta liczba ścian. Dowieść, że te dwa wyjątkowe wierzchołki nie są końcami jednej krawędzi.

VIII Wielkopolska Liga Matematyczna

A1. Rozwiązać równanie $n! + 2 = m^3$ w liczbach całkowitych dodatnich m, n.

A2. Dany jest trójkąt ABC. Punkt D leży na odcinku BC, a punkt E na odcinku AD, przy czym spełnione są równości $|AC| = |BC| = |AD|$ oraz $|BD| = |ED|$. Udowodnić, że $|\sphericalangle ABE| + 2|\sphericalangle DBE| = 90°$.

A3. Wykazać, że dla liczb rzeczywistych $x, y, z \geqslant \frac{1}{2}$, spełniających warunek $xyz = 1$ zachodzi nierówność $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \geqslant x + y + z + 3$.

A4. W trójkącie różnobocznym ABC kąt ACB ma miarę $60°$. Punkty $P \neq A$ i $Q \neq B$ leżą na okręgu opisanym na trójkącie ABC oraz spełniają zależności $AP \parallel BC$ i $BQ \parallel AC$. Wykazać, że $|AP| = |BQ|$.

A5. W zależności od liczby naturalnej $n \geqslant 2$ wyznaczyć największą liczbę k o następującej własności:
Można wybrać k takich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, że każde dwa różne wybrane podzbiory mają co najwyżej jeden element wspólny.

B1. Prostopadłościan P o wymiarach $a \times b \times c$ złożony jest z abc sześcianików o wymiarach $1 \times 1 \times 1$. Dwóch graczy wbija na zmianę igły w P, równolegle do wybranej krawędzi, przebijając tym samym a, b lub c sześcianików. Żaden sześcianik nie może być przebity dwa razy. Przegrywa gracz, który jako pierwszy nie może wbić igły zgodnie z podanymi prawidłami. Wyznaczyć wszystkie trójki (a, b, c), dla których rozpoczynający grę posiada strategię zapewniającą mu wygraną niezależnie od tego, co zrobi przeciwnik.

B2. Różne liczby naturalne a, b, d spełniają warunki: $d = \mathtt{NWD}(a, b)$ oraz $d + 1 = \mathtt{NWD}(a + 1, b + 1)$. Udowodnić, że $d < \sqrt{|a - b|}$.

B3. Dany jest trójkąt ABC oraz takie punkty D, E, F, że punkt C jest środkiem odcinka BD, punkt A jest środkiem odcinka CE oraz punkt B jest środkiem odcinka AF. Udowodnić, że środki ciężkości trójkątów ABC i DEF się pokrywają.

B4. Na tablicy napisano $n \geqslant 1$ liczb całkowitych dodatnich mniejszych od $2n$ i niekoniecznie różnych. Następnie, dopóki było to możliwe, wykonywano operację polegającą na zmazaniu dwóch zapisanych liczb $a, b > 1$ i dopisaniu liczby $\left\lfloor \frac{ab}{a+b} \right\rfloor$. Wykazać, że na tablicy pozostała przynajmniej jedna jedynka.

B5. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_k$ będą różnymi liczbami pierwszymi, mniejszymi od liczby naturalnej n. Liczba n przy dzieleniu przez $p_1, p_2, \ldots, p_k$ daje niezerowe reszty odpowiednio $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Połóżmy $p = \min\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ oraz $r = \max\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$. Dowieść, że $n^r > p^k$.

C1. Dany jest wielomian P o współczynnikach rzeczywistych. Każda liczba całkowita dodatnia występuje w ciągu $P(1), P(2), P(3), \ldots$ przynajmniej raz. Udowodnić, że stopień wielomianu P jest równy 1.

C2. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p o następującej własności: w rozwinięciu dziesiętnym ułamka $\frac{1}{p}$ na p-tym miejscu po przecinku znajduje się cyfra zero.

C3. Kwadrat o wymiarach $n \times n$ podzielono na n^2 kwadratów jednostkowych. Każdy odcinek będący bokiem któregokolwiek z kwadratów 1×1 pomalowano na biało lub czarno. Okazało się, że każdy kwadrat jednostkowy ma dokładnie dwa boki białe i dwa czarne. Udowodnić, że liczba białych odcinków jednostkowych na brzegu kwadratu $n \times n$ jest parzysta.

C4. Przekątne czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg o środku O przecinają się w punkcie P. Okręgi opisane na trójkątach ABP i CDP przecinają się w punkcie $E \neq P$, a okręgi opisane na trójkątach BCP i DAP w punkcie $F \neq P$. Wykazać, że punkty E, F, O, P leżą na jednym okręgu.

C5. Funkcja f określona dla argumentów rzeczywistych dodatnich i przyjmująca wartości rzeczywiste spełnia dla każdego $x > 0$ równość

$$f(x)^2 = 1 + (x - 1)f(x + 1).$$

Dowieść, że jeśli $f(x) > 0$ dla wszystkich $x \geqslant 1$, to $f(x) \geqslant x$ dla wszystkich $x \geqslant 1$.

IX Wielkopolska Liga Matematyczna

A1. Oznaczmy przez $S(k)$ sumę cyfr liczby naturalnej k w zapisie dziesiętnym. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 1$, które spełniają równość $S(11^n) = 2^n$.

A2. Dowieść, że dla każdego naturalnego $n \geqslant 1$ zachodzi nierówność $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n} > 1$.

A3. Trójkąt ABC wpisany jest w okrąg o środku O i promieniu R. Proste AC i BC przecinają symetralną odcinka AB w punktach odpowiednio P i Q. Wykazać, że $R = \sqrt{|OP| \cdot |OQ|}$.

A4. Funkcja $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ spełnia dla każdej liczby naturalnej $n > 0$ równość $\underbrace{f(f(\ldots f(}_{n} n)\ldots)) = n$. Wykazać, że dla nieskończenie wielu n zachodzi podzielność $n \mid f(n)$.

A5. Ustalmy liczbę naturalną $n \geqslant 2$. Będziemy dalej rozważać ciągi n-elementowe, z których każdy zawiera wszystkie liczby naturalne od 1 do n, w pewnej kolejności. Nazwijmy dwa takie ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ podobnymi, jeśli $a_i = b_i$ dla przynajmniej jednego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
W zależności od n wyznaczyć największą liczbę k, dla której prawdziwe jest zdanie: Istnieje k różnych ciągów, z których każde dwa są podobne.

B1. Trójkąt ABC jest prostokątny. Punkt C' jest spodkiem wysokości tego trójkąta, opuszczonej na przeciwprostokątną AB. Punkty K i L leżą odpowiednio na odcinkach AC i BC, przy czym $|CK| = |CL| = |CC'|$. Proste AC i LC' przecinają się w punkcie P, a proste BC i KC' w Q. Dowieść, że $|AP| + |BQ| = |AB|$.

B2. Na okręgu o środku O pomalowano na czerwono pewną liczbę rozłącznych łuków wraz z końcami. Łączna długość wszystkich czerwonych łuków jest większa niż połowa długości okręgu. Dowieść, że jeśli $0° < \alpha \leqslant 180°$, to istnieją takie czerwone punkty A i B, że $\sphericalangle AOB = \alpha$.

B3. Liczba naturalna $n \geqslant 1$ jest nieparzysta. Dla $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ niech a_k będzie liczbą naturalną, dla której zachodzą nierówności $2^{a_k - 1} \leqslant \frac{n}{k} < 2^{a_k}$. Dowieść, że $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_n = n$.

B4. Pięciokąt $ABCDE$ jest wypukły i spełnia warunki $AB \parallel CE$, $BC \parallel DA$, $CD \parallel EB$, $DE \parallel AC$. Wykazać, że $EA \parallel BD$.

B5. W ciągu $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{4n})$ występują liczby 1 i -1, każda z nich po $2n$ razy. Wyznaczyć największą możliwą wartość wyrażenia $\left|a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + a_3a_4a_5 + \ldots + a_{4n-2}a_{4n-1}a_{4n} + a_{4n-1}a_{4n}a_1 + a_{4n}a_1a_2\right|$.

C1. Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Dowieść, że wśród dowolnie wybranych $3n$ punktów płaszczyzny o obu współrzędnych ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ można wskazać takie cztery różne punkty A, B, C i D, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

C2. Trzy cięciwy pewnego okręgu przecinają się w punkcie P różnym od jego środka O, każde dwie pod kątem $60°$. Dowieść, że środki tych cięciw są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

C3. Niech $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych oraz niech $Q(x) = P(P(x))$. Udowodnić, że jeśli wielomian P ma pierwiastek rzeczywisty dodatni, to Q również ma pierwiastek rzeczywisty dodatni.

C4. Okrąg o jest częścią wspólną sfer s_1 i s_2. Trzy różne punkty A, B i C leżą na okręgu o, a punkt P leży na zewnątrz sfer s_1 i s_2. Prosta PA przecina sfery s_1 i s_2 w punktach odpowiednio $A_1 \neq A$ i $A_2 \neq A$. Prosta PB przecina sfery s_1 i s_2 w punktach odpowiednio $B_1 \neq B$ i $B_2 \neq B$. Prosta PC przecina sfery s_1 i s_2 w punktach odpowiednio $C_1 \neq C$ i $C_2 \neq C$. Dowieść, że płaszczyzny $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ są równoległe.

C5. Niech $d(k)$ oznacza ilość dzielników liczby naturalnej k. Ustalmy liczbę rzeczywistą $a > 1$. Dowieść, że

$$\frac{d(1)}{a^1} + \frac{d(2)}{a^2} + \frac{d(3)}{a^3} + \ldots + \frac{d(n)}{a^n} < \frac{1}{a^1 - 1} + \frac{1}{a^2 - 1} + \frac{1}{a^3 - 1} + \ldots + \frac{1}{a^n - 1}$$

dla wszystkich naturalnych $n \geqslant 1$.

X Wielkopolska Liga Matematyczna

A1. Znaleźć wszyskie liczby naturalne n, dla których $4^n + 2^n + 17$ jest kwadratem liczby naturalnej.

A2. Dla liczb rzeczywistych $x \neq 0$ i $y \notin \{-1, 0, 1\}$ definiujemy zbiory

$$A = \{x, 2x, 3x, 4x, \ldots\} \qquad \text{i} \qquad B = \{y, y^2, y^3, y^4, \ldots\}.$$

Udowodnić, że dla każdego całkowitego nieujemnego n można tak dobrać liczby x i y, by zbiory A i B miały dokładnie n elementów wspólnych.

A3. Prosta ℓ przechodzi przez środek ciężkości trójkąta ABC oraz przecina odcinki AC i BC. Wykazać, że odległość punktu C od prostej ℓ jest równa sumie odległości punktów A i B od prostej ℓ.

A4. Na nieskończonej szachownicy gracze stawiają na zmianę kółko (gracz I) i krzyżyk (gracz II). Gra się kończy, gdy gracz I zapełni kółkami pewien kwadrat 2×2. Rozstrzygnąć, czy gracz I posiada strategię, która pozwoli mu zakończyć grę, niezależnie od tego, co zrobi przeciwnik.

A5. Liczby naturalne $m \geqslant n \geqslant 2$ oraz $1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_m < 2^n$ spełniają warunek $\mathtt{NWD}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = 1$. Dowieść, że istnieją parami różne liczby $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{1, 2, \ldots, m\}$, dla których $\mathtt{NWD}\left(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\right) = 1$.

B1. Pewien okrąg dzieli każdy z boków czworokąta wypukłego $ABCD$ na trzy równe części. Wykazać, że ten czworokąt jest kwadratem.

B2. Rozwiązać równanie $a^{|b|+|c|} + b^{|c|+|a|} + c^{|a|+|b|} = -1$ w liczbach całkowitych a, b, c, niebędących jednocześnie zerami.

B3. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y nierówność $|f(x) - f(y)| \cdot |x - y| \leqslant 1$. Dowieść, że f jest funkcją stałą.

B4. Na obóz wyjechało $n \geqslant 3$ uczniów, niektórzy z nich znali się jeszcze przed wyjazdem. Podczas obozu codziennie odbywał się wieczorek integracyjny, na którym zaznajamiała się każda para uczestników, która posiadała wspólnego znajomego, poznanego najpóźniej w dniu poprzednim. Obóz zakończono z chwilą, w której każdy już poznał każdego. W zależności od n wyznaczyć największą możliwą, skończoną liczbę dni, które mógł trwać obóz.

B5. Sześcian o krawędzi 1 przecięto płaszczyzną. Otrzymany przekrój jest pięciokątem o polu P. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości P.

C1. Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \ + \ \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{d^2 + a^2} \ \geqslant \ (a + c)(b + d).$$

C2. Niech $d(n)$ oznacza liczbę dzielników n, a $k(n)$ – liczbę tych dzielników n, które są kwadratami liczb naturalnych. Wykazać, że dla każdego całkowitego $r \geqslant 1$ istnieje liczba naturalna n, spełniająca równość $d(n) = r \cdot k(n)$.

C3. Dany jest trójkąt ABC. Okrąg styczny do odcinków BC i AC przecina odcinek AB w punktach K i L. Wykazać, że $\Big||AK| - |BL|\Big| \leqslant \Big||AC| - |BC|\Big|$.

C4. Dany jest wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych i pewien zbiór A liczb naturalnych większych od 1. Powiemy, że zbiór A *pokrywa* wielomian $P(x)$, jeżeli dla każdego całkowitego n liczba $P(n)$ jest wielokrotnością pewnego elementu zbioru A. Dowieść, że jeżeli dany wielomian można pokryć zbiorem skończonym, to można go pokryć zbiorem jednoelementowym.

C5. Niech A będzie skończonym zbiorem liczb całkowitych. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n przez A_n oznaczmy zbiór tych liczb, które da się zapisać w postaci sumy $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, w której $a_1, \ldots, a_n \in A$ są niekoniecznie różne. Niech $r_n = |A_{n+1}| - |A_n|$. Dowieść, że ciąg (r) jest od pewnego miejsca stały.

XI Wielkopolska Liga Matematyczna

A1. Dane są liczby całkowite dodatnie a, b, c, d, dla których abc, bcd, cda, dab są kwadratami liczb naturalnych. Udowodnić, że liczby a, b, c, d również są kwadratami liczb naturalnych.

A2. Liczby rzeczywiste $x, y, z \neq 0$ spełniają równości $\frac{x^2+y^2}{z} = \frac{y^2+z^2}{x} = \frac{z^2+x^2}{y}$. Wykazać, że $x = y = z$.

A3. Niech $S(W)$ oznacza sumę kwadratów długości boków wielokąta W. Udowodnić, że dla każdego wielokąta wypukłego W można wskazać trzy jego wierzchołki, tworzące trójkąt T, dla którego $S(T) \geqslant S(W)$.

A4. Niech $k \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną. Dowieść, że jeśli iloczyn pewnych k kolejnych liczb naturalnych dzieli się przez 4^k, to dokładnie jeden z czynników dzieli się przez 2^{k+1}.

A5. W zależności od liczby całkowitej dodatniej n wyznaczyć największą liczbę k o następującej własności: dla każdego podziału kwadratu o boku $2n$ na prostokąty o wymiarach 2×1 istnieje prosta, która przecina co najmniej k prostokątów.

B1. Dwaj gracze stawiają na zmianę hetmany na szachownicy o wymiarach 9×9, przy czym hetmana można postawić wyłącznie na wolnym polu, którego nie atakuje żaden z hetmanów ustawionych wcześniej. Przegrywa gracz, który jako pierwszy nie może wykonać ruchu. Który z graczy – rozpoczynający grę, czy jego przeciwnik – ma strategię gwarantującą zwycięstwo?

B2. Rozstrzygnąć, czy można tak umieścić 6 punktów w przestrzeni, aby spełniony był następujący warunek: każde trzy z tych sześciu punktów wyznaczają płaszczyznę, która jest prostopadła lub równoległa do płaszczyzny wyznaczonej przez trzy pozostałe punkty i różna od niej.

B3. Podać przykład (z uzasadnieniem) funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o następującej własności:
Dla każdego niepustego przedziału (a, b) istnieje takie $c \in (a, b)$, że $f(c) > f(a)$ i $f(c) > f(b)$.

B4. Ustalmy liczbę pierwszą p oraz liczby całkowite dodatnie $a, n < p$. Niech A będzie zbiorem reszt z dzielenia przez p liczb $a, 2a, 3a, \ldots, na$. Dowieść, że ze zbioru A można wybrać $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ elementów, które uporządkowane rosnąco są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego.

B5. Dany jest równoległobok $ABCD$ o kącie ostrym przy wierzchołku A. Na trójkącie ABC opisano okrąg ω. Punkty E i F leżą odpowiednio na odcinkach AD i CD. Proste BE i BF przecinają okrąg ω odpowiednio w punktach K i L, różnych od B. Okrąg opisany na trójkącie DEK przecina okrąg ω w punktach K i P, a okrąg opisany na trójkącie DFL przecina okrąg ω w punktach L i Q. Dowieść, że punkt B leży na symetralnej odcinka PQ.

C1. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają równość $x + y + z = 0$. Wykazać, że $x \cdot 2^x + y \cdot 2^y + z \cdot 2^z \geqslant 0$.

C2. Dany jest trójkąt ABC. Wyznaczyć taki punkt P wewnątrz niego, by iloczyn odległości punktu P od prostych AB, BC i CA był możliwie największy.

C3. W spotkaniu uczestniczy $2n$ osób, liczba $n \geqslant 1$ jest naturalna. Ustalono, że każde dwie nieznające się osoby mają różną liczbę znajomych. Każdy chce siedzieć przy stole wyłącznie ze swoimi znajomymi (niekoniecznie wszystkimi) albo sam. Dowieść, że wystarczy do tego n stołów.

C4. Niech $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Wiadomo, że wielomian $P(x)^2$ ma wszystkie współczynniki całkowite. Dowieść, że wielomian $P(x)$ również ma wszystkie współczynniki całkowite.

C5. Liczby całkowite dodatnie a, b, u i v spełniają równość $au+bv = ab+1$. Niech A oznacza zbiór wszystkich liczb postaci $ax + by$ dla całkowitych x i y, spełniających warunki $0 \leqslant x < u$ i $0 \leqslant y < v$. Przez B oznaczmy zbiór liczb postaci $ax + by - ab$, w której x i y są liczbami całkowitymi spełniającymi nierówności $u \leqslant x < b$ oraz $v \leqslant y < a$. Ze wszystkich elementów zbiorów A i B utworzono ciąg rosnący. Dowieść, że elementy zbiorów A i B występują w tym ciągu na zmianę.

XII Wielkopolska Liga Matematyczna

A1. W każdym wierzchołku kwadratu napisano pewną liczbę całkowitą dodatnią. Na środku każdego boku tego kwadratu zapisano iloczyn liczb napisanych w jego końcach. Suma liczb napisanych na środkach boków kwadratu wynosi 2021. Obliczyć sumę liczb napisanych w wierzchołkach kwadratu.

A2. W trójkącie ABC kąty przy wierzchołkach A i B mają miarę odpowiednio $30°$ i $105°$. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Wyznaczyć miarę kąta BMC.

A3. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności: $a > 2$, $b > 3$ i $c > 4$. Udowodnić, że

$$ab + bc + ca > a + b + c + 17.$$

A4. Na szachownicy 8×8 ustawiono pewną liczbę wież, większą niż 1. Nazwijmy wieżę *spokojną*, jeśli atakuje co najwyżej dwie inne ustawione wieże. Wykazać, że przynajmniej dwie ustawione wieże są spokojne.

A5. Dzielnik d liczby naturalnej n nazwijmy *samotnym*, jeśli liczby $d+1$ i $d-1$ nie są dzielnikami n, a ponadto $d \neq 1$ i $d \neq n$. Wyznaczyć wszystkie liczby złożone, które nie mają samotnych dzielników.

A6. Trójkąt ABC ma kąt prosty przy wierzchołku C. Punkt M jest środkiem odcinka AC, a punkt N – środkiem odcinka BM. Punkty K i L są środkami ciężkości trójkątów odpowiednio CMN i ABN. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AMN. Punkty K, L, N, O leżą na jednym okręgu. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości proporcji $|AC| : |BC|$.

A7. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Na płaszczyźnie leży $2n$ czerwonych prostych, każde dwie z nich się przecinają w innym punkcie. Każdy punkt przecięcia kolorujemy na biało lub czarno, ale z zachowaniem następujących reguł:

(1) na każdej czerwonej prostej jest dokładnie n punktów czarnych;

(2) każdy trójkąt wyznaczony przez trzy czerwone proste ma nieparzystą liczbę białych wierzchołków.

W zależności od n wyznaczyć liczbę kolorowań spełniających te warunki.

A8. Wielomian P stopnia $n \geqslant 1$, o współczynnikach rzeczywistych, ma wszystkie pierwiastki rzeczywiste, niektóre być może wielokrotne. Niech m oznacza liczbę różnych pierwiastków wielomianu P, a k – liczbę jego niezerowych współczynników. Dowieść, że jeśli $P(0) \neq 0$, to $n \leqslant mk$.

B1. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 1 oraz punkt P, który leży na zewnątrz tego kwadratu. Udowodnić, że $|AP| + |BP| + |CP| > 2$.

B2. Niech x będzie liczbą dodatnią. Każdą z liczb: $\sqrt{x}$, $\sqrt{2x}$, $\sqrt{3x}$ zaokrąglono w dół, do najbliższej liczby całkowitej. Pierwsze dwa zaokrąglenia wynoszą 44 i 63. Ile wynosi trzecie?

B3. Mamy pustą szachownicę o wymiarach 8×8 pól. Ruch polega na położeniu po jednym pionku na każdym polu znajdującym się w wybranym wierszu lub kolumnie, przy czym na jednym polu może znajdować się wiele pionków. Wyznaczyć najmniejszą możliwą liczbę ruchów potrzebnych do tego, by na każdym polu szachownicy znalazła się inna (być może zerowa) liczba pionków.

B4. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Pewną liczbę naturalną zmniejszono o n procent i otrzymano w wyniku n. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości n.

B5. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AC| > |BC|$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 2|\sphericalangle BAC|$. Dwusieczna kąta ACB przecina odcinek AB w punkcie D. Punkt E jest spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C. Punkt F leży na odcinku BC i spełnia warunek $EF \parallel AC$. Dowieść, że okrąg opisany na trójkącie DEF przechodzi przez środek odcinka AC.

B6. Udowodnić, że jeśli a, b, c są trzema różnymi liczbami dodatnimi, to

$$\tfrac{a}{|b-c|} + \tfrac{b}{|c-a|} + \tfrac{c}{|a-b|} > 2.$$

B7. Niech $S(m)$ oznacza sumę cyfr zapisu dziesiętnego liczby naturalnej m. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną n o następującej własności: dla każdego całkowitego dodatniego a, niebędącego potęgą 10, zachodzi nierówność $S(a^n) < S(a)^n$.

B8. Rozstrzygnąć, czy istnieje rodzina prostych na płaszczyźnie o następującej własności:
Przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi jedna, dwie lub trzy proste z tej rodziny oraz żadne dwie proste z tej rodziny nie są równoległe.

C1. Prostopadłościany o wymiarach $2 \times 1 \times 1$ mają dwa rodzaje ścian – mniejszą kwadratową i większą prostokątną. Czy z takich prostopadłościanów można zbudować sześcian w taki sposób, żeby żadne dwa z nich nie sąsiadowały ze sobą całą większą ścianą? Uzasadnić odpowiedź.

C2. Liczba naturalna n ma wszystkie cyfry różne i nie występuje wśród nich 0, ani 1. Ponadto liczba n jest podzielna przez każdą ze swoich cyfr. Czy ta liczba może być:

(a) sześciocyfrowa?

(b) siedmiocyfrowa?

Uzasadnić odpowiedź.

C3. W pewnym trójkącie długość jednego z boków jest równa średniej arytmetycznej długości pozostałych boków. Analogicznie jest dla wysokości – długość jednej z nich jest średnią arytmetyczną długości dwóch pozostałych. Udowodnić, że ten trójkąt jest równoboczny.

C4. Na tablicy napisano kolejno 2021 liczb. Każda z nich, z wyjątkiem pierwszej i ostatniej, jest większa od średniej arytmetycznej liczby poprzedniej i następnej. Udowodnić, że na tablicy znajduje się liczba, która jest różna od wszystkich pozostałych.

C5. W każdym polu prostokątnej tabeli znajduje się liczba rzeczywista. W każdej kolumnie pokolorowano na niebiesko te pola, które zawierają najmniejszą liczbę w tej kolumnie. W każdym wierszu pokolorowano na czerwono te pola, które zawierają największą liczbę w tym wierszu. Niektóre pola były pokolorowane i na niebiesko, i na czerwono. Wykazać, że liczby we wszystkich takich polach są równe.

C6. Cztery różne liczby całkowite dodatnie a, b, c, n spełniają równość $a^2 + b^2 + c^2 = 3n^2$. Dowieść, że

$$\max\Big\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\Big\} > \sqrt{n}.$$

C7. Na wykresie paraboli o równaniu $y = x^2$ wybrano punkty A, B, C, o obu współrzędnych całkowitych. Rozstrzygnąć, czy pole trójkąta ABC może być równe 2021.

C8. Dane są czworościany foremne $A_1B_1C_1S$, $A_2B_2C_2S$ i $A_3B_3C_3S$. Odcinki A_2A_3, B_3B_1 i C_1C_2, leżą na jednej płaszczyźnie Π i przecinają się w punkcie S. Punkty A_1, B_2 i C_3 leżą po tej samej stronie płaszczyzny Π. Udowodnić, że środki okręgów opisanych na trójkątach $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ i $C_1C_2C_3$ leżą na jednej prostej.

XIII Wielkopolska Liga Matematyczna

A1. Prostokąt podzielono na 12 kwadratów. Jedenaście z nich to kwadraty o boku długości 1, a długość boku dwunastej płytki jest liczbą naturalną $a > 1$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości a.

A2. W pięciokącie $ABCDE$ wszystkie boki mają długość 2, a ponadto kąty wewnętrzne przy wierzchołkach B i E są proste. Obliczyć pole tego pięciokąta.

A3. W iloczynie $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100$ możemy zastąpić niektóre liczby ich odwrotnościami. Rozstrzygnąć, czy jest możliwe uzyskanie w taki sposób wyniku 2022.

A4. Niech $a = 2^{2021}$, $b = 3^{2021}$, $c = 4^{2021}$, $d = 5^{2021}$. Uzasadnić, że $5^a < 4^b < 3^c < 2^d$.

A5. Prosta ℓ oraz okręgi o_1 i o_2 są styczne w punkcie T. Okrąg o, przechodzący przez punkt T, przecina prostą ℓ oraz okręgi o_1 i o_2 w punktach odpowiednio P, K i L, różnych od T. Proste PK i PL przecinają po raz drugi okręgi o_1 i o_2 w punktach odpowiednio A i B. Wykazać, że punkty A, B i T leżą na jednej prostej.

A6. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. *Flota Rebeliantów* liczy $n + 1$ statków kosmicznych, ponumerowanych od 0 do n. Złe *Imperium Galaktyczne* częściowo zablokowało łączność – statki o numerach a i b mogą się komunikować wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $a + b$ jest potęgą dwójki o wykładniku całkowitym nieujemnym. Wykazać, że mimo tego nadanie komunikatu z każdego statku na każdy inny jest wykonalne (choć niekoniecznie bezpośrednio).

A7. Dla każdego ciągu (a) określamy ciąg (s) jego średnich arytmetycznych wzorem $s_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$. Rozstrzygnąć, czy istnieje ciąg (a) różnych liczb całkowitych dodatnich, o następującej własności:

$$a_{n+1} > s_n \text{ dla } 2 \mid n \qquad \text{oraz} \qquad a_{n+1} < s_n \text{ dla } 2 \nmid n.$$

A8. Ciąg (c), w którym $c_1 = 0$, spełnia równanie $c_{n+1} = c_n^2 + 1$ dla każdego $n \geqslant 1$. Udowodnić, że dla każdej liczby pierwszej p istnieją takie liczby naturalne $k > l \geqslant 1$, że $p \mid c_k + c_l$.

B1. Liczby rzeczywiste a, b, c mają tę własność, że każda z nich jest większa od iloczynu dwóch pozostałych. Udowodnić, że wśród tych liczb jest co najmniej jedna liczba dodatnia.

B2. Na płaszczyźnie, w pewnym punkcie, znajduje się pchła, która co jakiś czas wykonuje skok. Każdy kolejny skok jest dwa razy dłuższy od poprzedniego. Wykazać, że pchła nigdy nie znajdzie się dwa razy w tym samym punkcie.

B3. Sześciocyfrowe liczby naturalne a i b mają te same cyfry, tylko w odwrotnym porządku. Udowodnić, że liczba $a^2 - b^2$ dzieli się przez 99.

B4. Dany jest czworokąt $ABCD$. Punkt P leży na odcinku AD, ponadto zachodzą równości:

$$|AB| = |BP|, \qquad |BC| = |CP|, \qquad |CD| = |DP|.$$

Udowodnić, że suma miar kątów ABP, BCP i CDP jest równa $180°$.

B5. Na nieskończonej szachownicy ustawiono n wież. Nazwijmy wieżę *spokojną*, jeżeli atakuje co najwyżej dwie inne wieże. W zależności od n wyznaczyć najmniejszą możliwą liczbę spokojnych wież.

B6. Ustalmy liczbę rzeczywistą dodatnią x. Zbiór A, do którego należy liczba 1, ma następującą własność:

$$\text{jeśli } a \in A, \text{ to } \lfloor ax \rfloor \in A \text{ i } \lceil ax \rceil \in A.$$

Wyznaczyć wszystkie liczby x, dla których z powyższych własności wynika, że zbiór A zawiera wszystkie liczby całkowite dodatnie.

B7. W zależności od liczby pierwszej $p \geqslant 3$ wyznaczyć wszystkie uporządkowane trójki (a, b, c) liczb ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, dla których każda z liczb: $a + bc$, $b + ca$, $c + ab$ dzieli się przez p.

B8. Sześciokąt $ABCDEF$ jest foremny. Punkty P i Q leżą odpowiednio na odcinkach BC i DE, przy czym $|\sphericalangle PAQ| = 60^\circ$. Punkt R leży na odcinku PQ i spełnia warunek $|PR| \cdot |EQ| = |QR| \cdot |BP|$. Punkt S jest symetryczny do R względem prostej AQ. Udowodnić, że punkt S leży na odcinku EF.

C1. Liczba naturalna n nie jest podzielna przez 3, ani przez 5, a ponadto spełnia nierówność $1 < n < 90$. Wykazać, że mając dany kąt o mierze n°, można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki kąt o mierze 1°.

C2. Liczbę $\sqrt{x}$ zaokrąglono w dół do najbliższej liczby całkowitej, a liczbę $\sqrt[3]{x}$ zaokrąglono w górę do najbliższej liczby całkowitej. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste $x > 0$, dla których oba te zaokrąglenia są równe.

C3. Prostokąty $ABFC$ i $ADFE$ spełniają równości $|AB| = |AD| = a$ i $|BF| = |DF| = b$. Dowieść, że pole części wspólnej tych dwóch prostokątów jest większe lub równe $\frac{1}{2}ab$.

C4. Na każdym polu szachownicy 7×7 stoi jeden pionek. Nazwijmy *ruchem* następujący proces:
Wybieramy trzy pionki stojące w tej samej kolumnie lub w tym samym wierszu (niekoniecznie na sąsiednich polach), następnie zdejmujemy te dwa spośród nich, pomiędzy którymi stoi trzeci.
Przypuśćmy, że za pomocą takich ruchów doprowadziliśmy do tego, że na szachownicy został tylko jeden pionek. Na którym polu może stać ten pionek?

C5. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich (m, n), dla których równanie

$$|x-1| + |x-2| + \ldots + |x-m| = n$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań.

C6. W ciągu niemalejącym $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ występują wyłącznie liczby całkowite dodatnie. Każda liczba występuje w nim dokładnie tyle razy, ile wynosi największy wykładnik potęgi dwójki dzielącej tę liczbę. Początkowe wyrazy wyglądają następująco:

$$2, 4, 4, 6, 8, 8, 8, 10, 12, 12, 14, 16, 16, 16, 16, 18, 20, 20, \ldots.$$

Udowodnić, że $a_n > n$ dla wszystkich całkowitych dodatnich n.

C7. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest podstawą ostrosłupa $ABCDS$. Iloczyn pól trójkątów ABS i CDS jest równy iloczynowi pól trójkątów BCS i DAS. Niech I_a, I_b, I_c, I_d będą środkami sfer wpisanych w czworościany odpowiednio $DABS$, $ABCS$, $BCDS$, $CDAS$. Proste AI_a i CI_c przecinają płaszczyznę BDS w punktach odpowiednio K_a i K_c. Analogicznie, proste BI_b i DI_d przecinają płaszczyznę ACS w punktach odpowiednio K_b i K_d. Dowieść, że punkty K_a, K_b, K_c, K_d leżą na jednej płaszczyźnie.

C8. Dany jest trójkąt równoboczny ABC, w którym $|AB| = n$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej n. Rozważmy łamane bez samoprzecięć, mające początek w punkcie A i koniec w punkcie B, spełniające obie poniższe własności:

(1) cała łamana jest zawarta w trójkącie ABC,

(2) każdy odcinek łamanej jest równoległy do jednego z boków trójkąta i ma całkowitą długość.

Niech L_n będzie liczbą tych łamanych. Dowieść, że istnieją takie stałe $a, b > 1$, że

$$a^{n^2} \leqslant L_n \leqslant b^{n^2} \text{ dla wszystkich naturalnych } n \geqslant 1.$$

XIV Wielkopolska Liga Matematyczna

A1. Dane są dwie różne liczby rzeczywiste dodatnie. Jeśli obie te liczby powiększymy o mniejszą z nich, to ich iloczyn wzrośnie trzykrotnie. Ile razy wzrósłby ich iloczyn, gdybyśmy powiększyli obie te liczby o większą?

A2. Prostopadłościenne pudełko o podstawie 17×17 i wysokości 7 jest szczelnie wypełnione 289 *patyczkami* – prostopadłościanami $1 \times 1 \times 7$. Patyczek nazwiemy *ustawionym pionowo*, jeśli jego najdłuższa krawędź jest prostopadła do podstawy pudełka. Uzasadnić, że co najmniej dwa patyczki są ustawione pionowo.

A3. Na przekątnej AC równoległoboku $ABCD$ leży punkt P, przy czym

$$|AB| = |AP|, \qquad |AD| = |DP|, \qquad |BP| = |CP|.$$

Udowodnić, że $|\sphericalangle ABP| = 2|\sphericalangle APD|$.

A4. Dane są dwie liczby naturalne dwucyfrowe a i b, niepodzielne przez 10. Liczba a' powstaje z a przez zamianę cyfr miejscami, tak samo b' z b. Udowodnić, że jeśli $ab = a'b'$, to iloczyn cyfr jedności liczb a i b jest równy iloczynowi cyfr dziesiątek liczb a i b.

A5. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x = \left|\sqrt{x+y} - \sqrt{z+x}\right| \\ y = \left|\sqrt{y+z} - \sqrt{x+y}\right| \\ z = \left|\sqrt{z+x} - \sqrt{y+z}\right| \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych nieujemnych x, y, z.

A6. Na oceanie leżą wyspy A, B i C, na których jest odpowiednio a, b i c miast. Każde dwa miasta mają połączenie lotnicze wtedy i tylko wtedy, gdy leżą na różnych wyspach. Turysta chce odwiedzić każde z miast dokładnie jeden raz, podróżując wyłącznie samolotami, a na końcu wrócić do miasta, w którym zaczął podróż. Wyznaczyć wszystkie trójki (a, b, c) liczb całkowitych dodatnich, dla których jest to możliwe.

A7. Liczby całkowite dodatnie m i n spełniają nierówność $n > m$ oraz podzielność $n^m \mid m^n$. Udowodnić, że istnieje taka liczba pierwsza p, że $p^n \mid n^{n-m}$.

A8. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $|AB| < |AC|$. Dwusieczne kątów ABC i BCA przecinają się w punkcie I oraz przecinają wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka A w punktach odpowiednio P i Q. Okrąg opisany na trójkącie CPQ przecina po raz drugi prostą AC w punkcie D. Znając kąty trójkąta ABC, wyznaczyć miarę kąta QID.

B1. Czy istnieją liczby całkowite dodatnie a, b, c, dla których zachodzą równości:

$$\mathtt{NWD}(a, b) = 480, \qquad \mathtt{NWD}(b, c) = 540, \qquad \mathtt{NWD}(c, a) = 900?$$

Uzasadnić odpowiedź.

B2. Dane są liczby dodatnie x, y i z. Wiadomo, że liczby x^2, y^2 i z^2 są długościami boków pewnego trójkąta. Uzasadnić, że x, y i z również są długościami boków trójkąta.

B3. Dwaj gracze zapisują na tablicy na zmianę liczby naturalne, przy czym pierwsza zapisana liczba musi być mniejsza od 2023, a każda następna – mniejsza od poprzedniej. Gra kończy się wygraną tego z graczy, po ruchu którego suma zapisanych liczb będzie równa 2023. Jeśli tak się nie stanie aż do momentu, gdy jeden z graczy zapisze liczbę 0, to gra kończy się remisem. Uzasadnić, że przy bezbłędnej grze obu graczy będzie remis.

B4. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ kąty przy wierzchołkach A, C, E są proste. Udowodnić, że każda przekątna tego sześciokąta ma długość nieprzekraczającą połowy obwodu trójkąta BDF.

B5. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb pierwszych $p < q < r$, dla których każda z poniższych liczb jest pierwsza:

$$p + q + r + 1, \qquad pqr + 49, \qquad p^2 + q^2 + r^2 + 23.$$

B6. Wyznaczyć największą liczbę rzeczywistą k, dla której nierówność

$$\frac{a}{c^2a+k}+\frac{b}{a^2b+k}+\frac{c}{b^2c+k}\geqslant 1$$

prawdziwa jest dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych a,b,c, spełniających warunek $abc=1$.

B7. W trójkącie ABC punkty M i N są środkami boków odpowiednio BC i AC. Dowieść, że $AM\perp BN$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|AC|^2+|BC|^2=5|AB|^2$.

B8. Dana jest nieskończona szachownica, na której stoją wilk i zając, zajmując pola mające wspólny bok. Zając porusza się tak jak szachowy skoczek. Wilk porusza się o dokładnie trzy pola w przód, tył, lewo lub prawo. Wilk i zając wykonują ruchy na zmianę, rozpoczyna zając. Jeśli wilk i zając staną na tym samym polu, wilk zje zająca. Rozstrzygnąć, czy zając ma strategię pozwalającą uciec wilkowi na odległość większą niż 2023.

C1. W trójkącie ABC punkty M i N są środkami boków, odpowiednio, BC i CA. Punkt S jest środkiem odcinka MN. Odcinki AS i BN przecinają się w punkcie P. Jaką część pola trójkąta ABC stanowi pole trójkąta NPS?

C2. Na szachownicy o wymiarach 8×8 stoi n wież, n gońców i n skoczków, przy czym żadna z tych figur nie atakuje żadnej z $3n-1$ pozostałych. Wyznaczyć największą możliwą wartość n.

C3. Liczby rzeczywiste x, y spełniają warunek $x^2+xy+y^2+\frac{1}{4}=x+y$. Udowodnić, że $x,y\geqslant 0$.

C4. Dana jest liczba naturalna $n\geqslant 2$ oraz liczby całkowite a, b, c, d. Udowodnić, że jeśli ab, cd oraz $ac+bd$ są liczbami podzielnymi przez n, to liczby ac i bd również dzielą się przez n.

C5. Ali i Baba znaleźli $2n$ pereł, każda o innej wartości należącej do zbioru

$$\{1,2,4,8,\ldots,2^{2n-1}\}.$$

Umówili się na następujący podział znaleziska. Najpierw Ali nawinie perły na nić w dowolnej kolejności, robiąc z nich naszyjnik. Następnie Baba przetnie naszyjnik w dwóch miejscach, na dwa sznury po n pereł. Na końcu Ali wybierze dla siebie jeden z tych dwóch sznurów, a drugi sznur weźmie Baba. W zależności od liczby naturalnej $n\geqslant 1$ wyznaczyć największą liczbę m o następującej własności: Ali może sobie zagwarantować sznur pereł o wartości co najmniej m, niezależnie od tego, co zrobi Baba.

C6. Odcinki AD, BE i CF są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC i przecinają się w punkcie H. Punkty K, L, M leżą, odpowiednio, na odcinkach BC, CA, AB oraz

$$HK\perp EF,\qquad HL\perp FD,\qquad HM\perp DE.$$

Udowodnić, że odcinki AK, BL i CM przecinają się w jednym punkcie.

C7. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, które dla wszystkich $x,y\in\mathbb{R}$ spełniają równanie

$$f(x-f(y))=f(y)+f(x+y).$$

C8. Wyznaczyć największą liczbę naturalną n o następującej własności:

istnieją takie liczby całkowite dodatnie $a_1,a_2,\ldots,a_n$,
że dla każdej pary różnych liczb $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$
zachodzi równość $\mathtt{NWD}(a_i,a_j)=|a_i-a_j|$,

lub udowodnić, że największa taka liczba n nie istnieje.