Wielkopolska

Liga

Matematyczna

XV W L M – Z E S T A W **B**

- zadania dla kategorii *Junior* (klasy 7 i 8 szkół podstawowych): B1, B2, B3, B4
- zadania dla kategorii *Senior* (klasy 1 i 2 szkół ponadpodstawowych): B3, B4, B5, B6
- zadania dla kategorii *Weteran* (klasy 3, 4 i 5 szkół ponadpodstawowych): B5, B6, B7, B8

B1. Wybrano dwie liczby naturalne dwucyfrowe, mniejsze od 50. Na tablicy napisano, jedno za drugim: iloczyn tych liczb, ich sumę oraz 01. W ten sposób powstała jedna liczba naturalna (np. dla liczb 34 i 27 mamy $34 \cdot 27 = 918$ i $34 + 27 = 61$, więc otrzymamy 9186101). Uzasadnić, że powstała liczba jest zawsze złożona.

B2. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wiadomo, że liczby $\sqrt{n}$ i $\sqrt{n+1}$ mają taką samą pierwszą i drugą cyfrę po przecinku w zapisie dziesiętnym. Udowodnić, że $n > 2024$.

B3. Pięciokąt wypukły $ABCDE$ i punkt P leżący na odcinku CD spełniają warunki:

$$BC \parallel AP \parallel DE, \qquad CD \parallel BE, \qquad AE \parallel BP.$$

Dowieść, że pole czworokąta $APDE$ i pole trójkąta ACE są równe.

B4. Na morzu leży 10 wysp, pomiędzy każdymi dwiema z nich jest dwukierunkowe połączenie lotnicze w cenie będącej liczbą naturalną od 1 do 9 koron. Zachowane są przy tym następujące reguły:

- cena przelotu z wyspy A na wyspę B jest zawsze taka sama, jak cena przelotu z wyspy B na wyspę A;
- dla różnych A, B, C ceny przelotów: z A na B, z B na C oraz z C na A są różne.

Turysta zamierza odwiedzić każdą z tych wysp dokładnie raz, przy czym może on zacząć podróż na dowolnej wyspie i skończyć na dowolnej innej. Udowodnić, że może on tak zorganizować podróż, by zapłacić za przeloty łącznie nie więcej niż 15 koron.

B5. Liczby a i b są całkowite dodatnie. Wykazać, że liczba $14^a + 15^b$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.

B6. Wyznaczyć najmniejszą stałą c o następującej własności lub udowodnić, że taka nie istnieje:
Dla każdego całkowitego dodatniego n w wyrażeniu

$$\left| 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \right|$$

można zmienić część znaków $+$ na $-$ w taki sposób, by otrzymać wartość nieprzekraczającą $\frac{c}{n^2}$.

B7. Odcinek AD jest średnicą okręgu ω opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC, w którym $|AB| < |AC|$. Punkt K leży na odcinku AC i spełnia równość $|BK| = |CK|$. Proste AC i BD przecinają się w punkcie L. Okrąg opisany na trójkącie BKL przecina okrąg ω w punktach B i M. Dowieść, że styczne do okręgu ω w punktach D i M przecinają się na prostej BC.

B8. Niech $n \geqslant 2024$ będzie liczbą naturalną. W przestrzeni danych jest n parami rozłącznych zielonych prostych oraz punkt P, który jest oddalony od każdej z tych prostych o nie więcej niż 1. Dowieść, że odległość pomiędzy pewnymi dwiema zielonymi prostymi jest mniejsza niż $\frac{3}{\sqrt{n}}$.

Rozwiązania powyższych zadań należy przesłać za pośrednictwem strony internetowej ***wlm.wmi.amu.edu.pl*** w terminie do

29 lutego 2024 r., godz. 20:00.

Prace powinny być **w formacie PDF**. Akceptowane są skany rozwiązań napisanych ręcznie i rozwiązania zredagowane na komputerze. Przed wysłaniem rozwiązań zadań prosimy zapoznać się z regulaminem dostępnym na wyżej wymienionej stronie internetowej.