Wielkopolska
Liga
Matematyczna

XV W L M – Z E S T A W **C**

- zadania dla kategorii *Junior* (klasy 7 i 8 szkół podstawowych): C1, C2, C3, C4
- zadania dla kategorii *Senior* (klasy 1 i 2 szkół ponadpodstawowych): C3, C4, C5, C6
- zadania dla kategorii *Weteran* (klasy 3, 4 i 5 szkół ponadpodstawowych): C5, C6, C7, C8

C1. Każde pole szachownicy o wymiarach 12×12 jest kwadratem o boku 1. Pola są pomalowane na czarno i biało w sposób tradycyjny – każde dwa pola mające wspólny bok są różnych kolorów. Tę szachownicę rozcięto na trapezy prostokątne o wysokości 1 oraz podstawach 2 i 1. Skutkiem tego niektóre z pól zostały rozcięte wzdłuż przekątnej. Uzasadnić, że liczba rozciętych białych pól i liczba rozciętych czarnych pól są równe.

C2. Czy istnieją takie liczby pierwsze p, q, r (niekoniecznie różne), że liczby

$$pq+1, \qquad qr+1, \qquad rp+1$$

są kwadratami liczb naturalnych? Uzasadnić odpowiedź.

C3. Liczby rzeczywiste x i y spełniają następującą równość:

$$6(x^2+y^2) = 5(x+y)+4xy-3.$$

Udowodnić, że co najmniej jedna z liczb x, y jest większa lub równa $\frac{1}{2}$.

C4. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Półproste $AB^{\rightarrow}$ i $DC^{\rightarrow}$ przecinają się w punkcie P, a półproste $BC^{\rightarrow}$ i $AD^{\rightarrow}$ w punkcie Q. Punkty K, L, M, N leżą, odpowiednio, na odcinkach AP, DP, BQ, AQ oraz:

$$|PK| = |AB|, \qquad |PL| = |CD|, \qquad |QM| = |BC|, \qquad |QN| = |AD|.$$

Udowodnić, że $|KN| = |LM|$.

C5. Niech $n \geqslant 5$ będzie liczbą naturalną. Na zielono pokolorowano k wybranych przekątnych n-kąta foremnego. W zależności od n wyznaczyć największą możliwą wartość k, jeśli:
(A) każde dwie zielone przekątne się przecinają;
(B) każde dwie zielone przekątne mają punkt wspólny.

(Uwaga. Koniec przekątnej należy do niej, więc może być punktem wspólnym dwóch przekątnych. Przekątne przecinające się to takie, które mają punkt wspólny różny od ich końców.)

C6. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wyznaczyć wszystkie ciągi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ liczb całkowitych dodatnich, które spełniają następujące dwie równości:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = n, \qquad 1a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = n^2.$$

C7. W każdym polu kwadratowej tabeli 3×3 znajduje się liczba rzeczywista. W każdym wierszu iloczyn wpisanych liczb jest równy P. W każdej kolumnie wpisane liczby od góry do dołu tworzą niestały trójwyrazowy ciąg arytmetyczny, a różnice tych ciągów należą do przedziału $[-1,1]$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości P.

C8. Punkt D jest środkiem boku BC różnobocznego trójkąta ostrokątnego ABC. Dwusieczne kątów CAD i BAD przecinają odcinek BC w punktach, odpowiednio, P i Q. Okręgi opisane na trójkątach ABP i ACQ przecinają się w punkcie $X \neq A$. Dowieść, że $2|AX| > |AB| + |AC|$.

Rozwiązania powyższych zadań należy przesłać za pośrednictwem strony internetowej ***wlm.wmi.amu.edu.pl*** w terminie do

31 marca 2024 r., godz. 20:00.

Prace powinny być **w formacie PDF**. Akceptowane są skany rozwiązań napisanych ręcznie i rozwiązania zredagowane na komputerze. Przed wysłaniem rozwiązań zadań prosimy zapoznać się z regulaminem dostępnym na wyżej wymienionej stronie internetowej.